数学の面白さが分かる発展的教材の研究

－見かけが違う２つの問題に潜む共通な構造や特徴を利用した教材につての考察－

2005/8/5
第87回　全国算数・数学教育研究会　長野大会
高等学校部会　10 問題解決・数学的な考え方分科会
私立武蔵大学　経済学部　講師
私立武蔵高校　講師
吉田　昌裕
Akyoshida@aol.com

1. はじめに.

数学の面白さの１つに「見かけが違う２つの問題に潜む共通な構造や特徴を見つけること」がある．見かけの違いに惑わされずその２つに潜む構造や特徴に気が付いた生徒は驚き納得し，それを聞いた生徒は感心し納得する．以下，「２つに問題に潜む共通性」を授業に生かすにはどのような教材を使い，「共通性」をどのように利用するか，「新しい結果の発見（筑波大学附属駒場高の実践）」，「上手く解けない問題を共通な構造を見つけて解く（筑波大学附属駒場中の実践）」，「生徒が興味を待った意外な関連性（私立武蔵高校の実践）」をもとに話していく．

2.　新しい結果（定理）の発見

結果が等しい２つの問題から，それを発展させ新しい結果を導く

高１の生徒にやった「場合の数」の授業．当然　${}_nC_r$　の計算はできる．また，場合の数の問題を解いていくときに必要になったので図形などを使って　$\sum_{k=1}^{n} k$　$\sum_{k=1}^{n} k^2$　$\sum_{k=1}^{n} k^3$　は求めてある．

2-1　実際の授業の流れ

発問１　次の結果は？

$${}_{n+1}C_2$$

発問２　では，次の結果は？

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

発問３　結果が等しいのは偶然 or 必然？　今日はこれについて考えてみよう．

ここで，机間巡視をし，生徒が考えにくいようなら，最後にある Work Sheet を配る．

発問４　このプリントを使い，

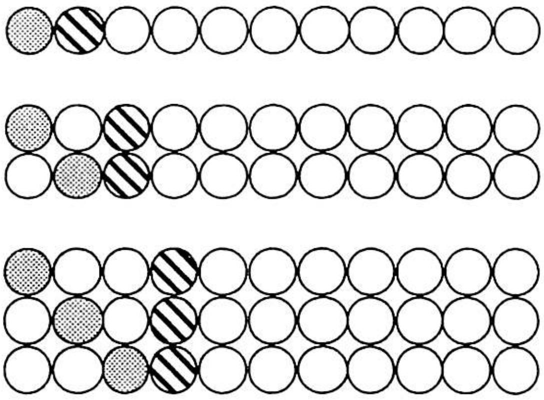
$${}_{n+1}C_2 = \sum_{k=1}^{n} k$$

となることを説明しろ．

ここで，ポイントとなるのは，${}_{n+1}C_2$　の結果と　$\sum_{k=1}^{n} k$　の結果が等しいのが偶然ではないなら，（n+1）個から２個を選び出す，すべての組合せを書き出すと，その中には１＋２＋３＋…＋n の構造が隠れていることだ．
机間巡視をしたとき生徒が気が付かないなら，
「２個取り出す場合をすべて書き出してみれば」
「もれなく，ダブりなく書き出すためにはどうしたらいい？」
「$\sum_{k=1}^{n} k$　てなにを表している？」
など，生徒に応じて話しかけたり，全体になげかける．この「和の構造」に気が付くところがこの問題の面白い

とことで，また，ここで生徒自身に気が付かせると次の課題の取り組み方がが変わってくるので，できるだけ時間をとり，気が付いた生徒にすぐ答を言わせるのではなく，何人かが分かるまで待つことが重要となる．

答は次の図を見れば明らか．



発問５　$\sum_{k=1}^{n} k$　の結果を組合せの考えで求められた．では，

$${}_{n+1}C_2 = \sum_{k=1}^{n} k$$

を拡張し他のΣの値も求められないか？

ここで，$\sum_{k=1}^{n} k$　を拡張して　$\sum_{k=1}^{n} k^2$ を考えても上手くいかない．机間巡視をしながら，${}_{n+1}C_2$ を拡張するには，n+1，2をどのように変えればいいか考えさせる．

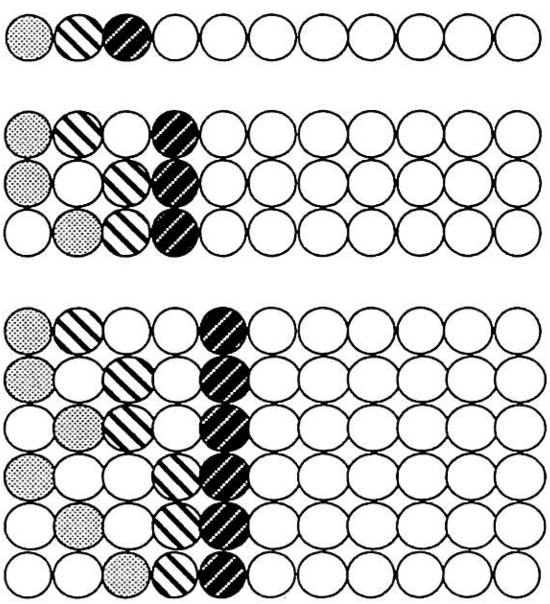
発問６　$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$　なので，${}_{n+1}C_2 = \sum_{k=1}^{n} k$　の左辺を拡張し

$${}_{(\ )}C_{(\ )} = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

を考えても上手くいきそうにない．では，右辺の ${}_{n+1}C_2$ をどのように拡張するか？

発問７　${}_{n+2}C_3$　つまり，n+2 から３個取るすべての組合せを書き出すと，どのような和の構造になるか？

ここでも時間をとり，机間巡視をして生徒に声をかけることが重要になる．次の図をみれば，Σk が入れ子細工のようになっている構造が分かる．



これより，

$${}_{n+2}C_3 = 1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+\cdots+n)$$

$${}_{n+2}C_3 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)$$

が分かる． この後は，クラスに応じて，

発問 8　今度は，${}_{n+2}C_3 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$　を拡張すると？
と発問してもいいし，

発問 9　　次の 2 つ式から，その次はどうなりそうか予想しろ．

$${}_{n+1}C_2 = \sum_{k=1}^{n}k$$

$${}_{n+2}C_3 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

発問 10　それを証明しろ．
と授業を展開してもいい．いずれにしろ，入れ子細工のようになっていることに気が付けば拡張も証明もできる．

この授業から次の公式を導くことができる．

$${}_{n+1}C_2 = \sum_{k=1}^{n}k$$

$${}_{n+2}C_3 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

$${}_{n+3}C_4 = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$$

$${}_{n+r}C_{r+1} = \frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\cdots(k+r-1)$$

実際の授業では　${}_{n+3}C_4 = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$　までで，あとは各自の研究テーマとした．

2-2　この後の展開・発展

前にも書いたが，実際の授業は高 1 の場合の数のところなので ${}_{n+3}C_4 = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$ までしかやっていないが，高 2 で数列のところなら，この後，授業を次のように展開（授業の後，黒板の前に出てきた何人かの特に興味を持った生徒と話した中では少し触れた）することもできる．積分を学んだ後なら，積分公式との形の関連を考えても面白い．また，出てきた結果は和分と関連する．

$${}_{n+1}C_2 = \sum_{k=1}^{n}k \qquad \sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$${}_{n+2}C_3 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1) \qquad \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

$${}_{n+3}C_4 = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) \qquad \frac{1}{3!}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

となるが，各 2 番目の式の左辺の分母をはらえば，

$$\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

が求まる．一般化すると，

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m)=\frac{1}{m+2}n(n+1)(n+2)\cdots(n+m+1)$$

となる．これをじかに証明するには，

証明】

$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+m+1)-(n-1)n(n+1)\cdots(n+m)=(m+2)\{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)\}$$
$$(n-1)n(n+1)\cdots(n+m)-(n-2)(n-1)n\cdots(n+m-1)=(m+2)\{(n-1)n(n+1)\cdots(n+m-1)\}$$
$$\vdots$$
$$2\cdot3\cdot\cdots(3+m)\quad-1\cdot2\cdot\cdots(2+m)\quad=\quad(m+2)\{2\cdot3\cdot\cdots\cdot(2+m)\}$$
$$-)\ \underline{1\cdot2\cdot\cdots(2+m)\quad-0\cdot1\cdot2\cdot\cdots(1+m)\quad=\quad(m+2)\{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(1+m)\}}$$
$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+m+1)\quad=\quad(m+2)\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\cdots(k+m)$$

よって，

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m)=\frac{1}{m+2}n(n+1)\cdots(n+m+1)$$

□

また，前にも書いたが，積分の後なら，次の積分の公式と形を比べさせても面白い．

$$\int xdx=\frac{1}{2}x^2+C$$
$$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$$
$$\int x^3=\frac{1}{4}x^4+C$$

3.　上手く解けない問題を共通な構造を見つけて解く．

見かけは違うがどの問題も和が一定である構造を持っている３つの問題がある．そこに着目して問題の解法を考える．

3-1　実際の授業の流れ

一辺が20㎝となる正三角形ABCを印刷したプリントを配る．また，定規を用意させておく．

発問１　三角形ABC の内部のまたは周上の好きなところに点P をとれ．

ここで，机間巡視し，なるべく変わったところに点P をとったものを見つけておく．
変わったところ点を取った生徒や中心近くに点をとった生徒にもう一枚プリントを渡し点の位置をとらせそれを黒板に貼る．

発問２　点P から３辺にそれぞれ垂線 PH_1，PH_2，PH_3 を引け．
発問３　３垂線 PH_1，PH_2，PH_3 の長さをそれぞれ測れ．

黒板に図をはった生徒に，それぞれの長を，黒板の各自の図にかき込ませる．
発問４　その和を求めよ．

もちろん，生徒の答は和は $10\sqrt{3}$ ㎝に近い値になる．他の生徒の和も聞き，どんなとこに点があっても，和は一定になりそうなことを確認する．このとき三角形が正三角形であることがでてこなかったら
発問５　この三角形の特徴は？
と聞き，次のようにまとめる．

＜正三角形の３垂線の和の定理＞

正三角形の内部（周上でもよい）から３つの辺に引いた垂線の和は一定

発問６　定理を証明しろ.

面積を使えば簡単に証明できる．問題自体は教科書や問題集によくのっている問題.
実際の授業では，正三角形でなければ，一定でないこと．一定でないときは和が最大・最小になる点はどうなるか考えていった.

次に，課題１を書いたプリントを配る.

課題１　容器A の容積は８ℓで水が８ℓ入っている．残りの２つの容器B，Cは空になっている．次の問に答えよ．ただし，問題を解くときに，容器の水をこぼしてはいけない.

(1)　残りの容器Bの容積が５ℓ，Cが４ℓのとき，この３つの容器だけ使って，水を７ℓと１ℓに分けなさい.
(2)　残りの容器Bの容積が５ℓ，Cが３ℓのとき，この３つの容器だけ使って，水を４ℓと４ℓに分けなさい.
(3)　残りの容器Bの容積が６ℓ，Cが５ℓのとき，この３つの容器だけ使って，水を４ℓと４ℓに分けなさい.

発問７　課題の問題を解け.

容器A，B，C に水がそれぞれ aℓ，bℓ，cℓ入っているのを(a, b, c)と書くとにすれば，(1) は，

$$(8,\ 0,\ 0) \to (3,\ 5,\ 0) \to (3,\ 1,\ 4) \to (7,\ 1,\ 0)$$

と操作すれば解ける．(2)は，

$$(8,\ 0,\ 0) \to (3,\ 5,\ 0) \to (3,\ 2,\ 3) \to (6,\ 2,\ 0) \to (6,\ 0,\ 2) \to$$
$$\to (1,\ 5,\ 2) \to (1,\ 4,\ 3) \to (4,\ 4,\ 0)$$

とできる．ただし，(2)は７回の操作が必要で途中で飽きてしまう生徒も出てきてしまうので，机間巡視をして，声をかけてやる必要がある．生徒の様子によってはヒントとして「７回の操作でできる」と教えてもいいだろう.
(3)はどうしてもできない.

発問８　本当に(3) はできない？　できないことを示すには？
発問９　(2)を簡単に解いたり，(3)ができないことを示す上手い方法を考えよ．そのために，正三角形の問題とこの問題の共通点はなにか考えよ.

この２つの問題の共通点は「どちらも和が一定」　－－ 正三角形の３垂線の和の定理は垂線の長さの和がいつも一定．水の問題はいつでも３つの容器に入っている水のはが一定 －－　ということだ．このことを確認したあと最後のWork Sheet No.2 ような図１を書いた紙を配り，次のように発問する.

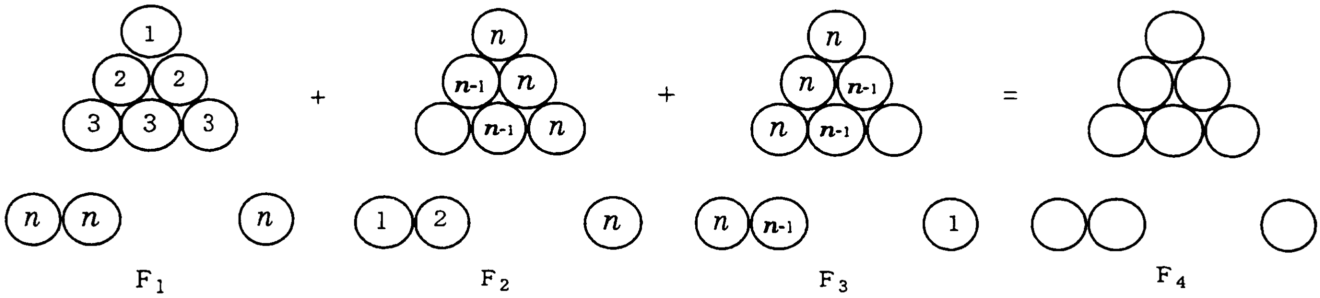
発問10　この図１を使って課題１を解け.

ここで机間巡視をしながら，「正三角形の３垂線の和の定理」は何だったかを聞いたり，「どちらも和が一定」であることを確認していく.
「この図の正三角形は高さが８」で，これと「課題１の水の和はいつも一定で８ℓ」が対応している．これを使えば，例えば点PからRS，SQ，QRまでの垂線の長さをを順に，容器A，B，Cに入っている水の量としてやればいい．（図２の点Ｐは容器A，B，Cにそれぞれ３ℓ，１ℓ，４ℓ入っていること表している．）また，容器Bが５ℓの容器であることはSQからの高さが最大で５となればよく，各操作は点から領域の辺まで辺に平行に動くことに対応する.
このことより，(2)の解は図３のようになる.
また，(3)ができないことは図４で，点Qから辺に平行で領域の辺まで進むことをどのようにくり返しても点Tに到達しないことで証明できる.

三平方の定理と $\sum_{k=1}^{n} k^2$ の値が分かれば中学生でも球の体積，表面積を求めることができるので，筑駒の中学生には三平方の定理の後，必ず球の体積と表面積を求めさせてきた．そのとき，$\sum_{k=1}^{n} k^2$ を求めさせるのに，

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = 1 + (2+2) + (3+3+3) + \cdots + (n+n+\cdots+n)$$

を使い，下の図の方法を使うことが多かった．ただ，この場合は1番右の F_4 の○の中がみな同じになることを証明する必要がある．授業では4段の場合を具体的に確認させた後，n 段の F_4 のすべての○が $2n+1$ になることを生徒に説明させる．そのときの生徒の説明によって，いろいろと助言を与えるが，生徒の考えを上手く説明するためには次の関数を導入すれば上手くことが多い．



発問11　図形 F_1，F_2，F_2 の上から a 左から b の円に書かれている数字をそれぞれ，

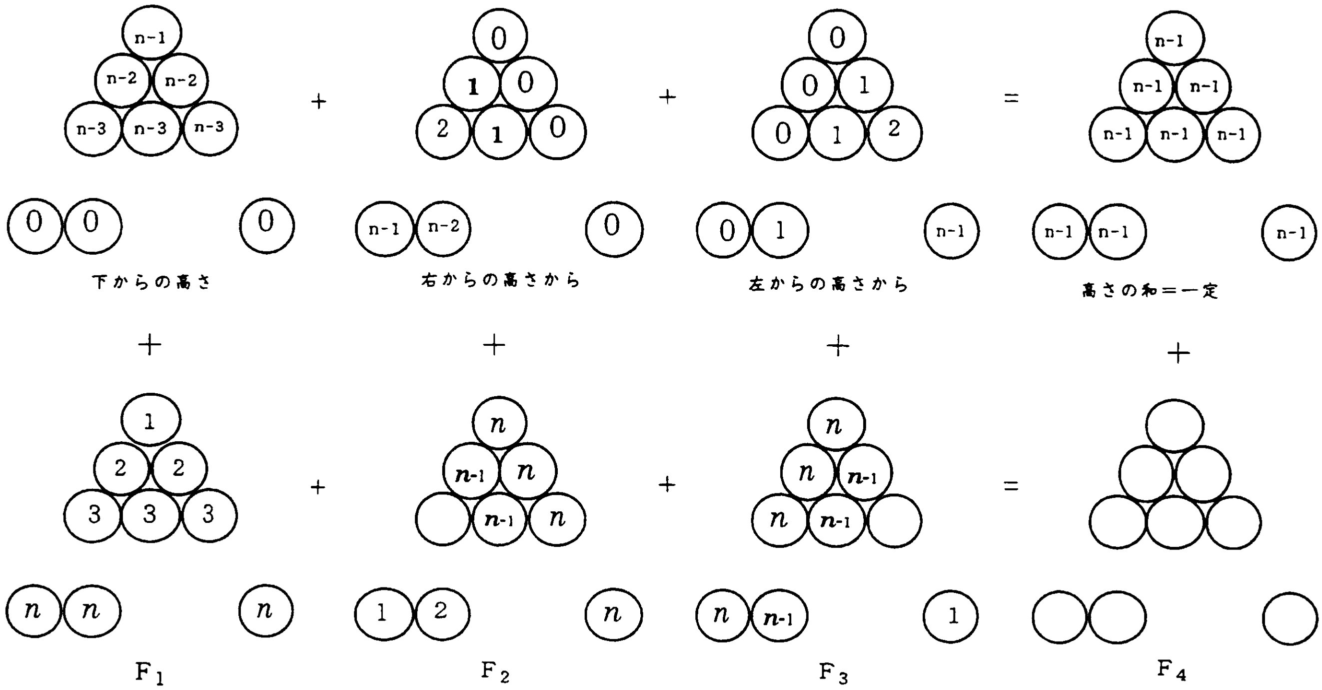
$f_1(a,\ b)$，$f_2(a,\ b)$，$f_3(a,\ b)$

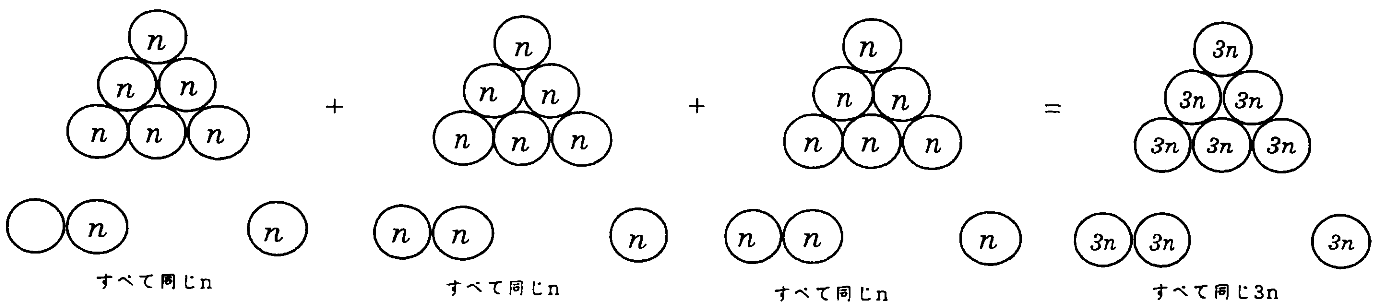
とする．このとき $f_1(a,\ b)$，$f_2(a,\ b)$，$f_3(a,\ b)$ をそれぞれ，a，b，n を使って表せ．

発問12　$f(a,\ b) = f_1(a,\ b) + f_2(a,\ b) + f_3(a,\ b)$　を求めよ．

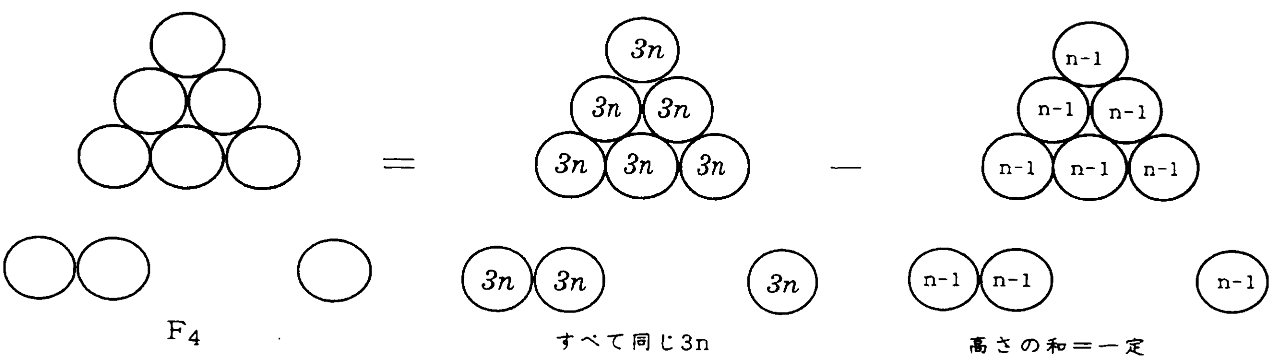
ただ，年によっては，

発問13　高さが $n-1$ の正三角形を使い F_4 のすべての○が $2n+1$ となることを示せ．
と発問することがある．
これは次のように考えればいい





つまり，

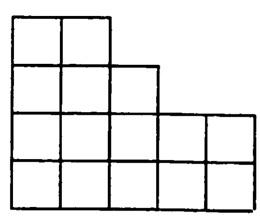


となり，一定．この証明にも「正三角形の３垂線の和の定理」が使えることが分かる．

4.　生徒が興味を持った意外な関連性

初めの問題は黒田俊郎さんから教わった問題で黒田さん生徒が気が付いた解法である．この問題は場合の数の導入とき筑駒でも武蔵でも必ずとりあげることにしている．理由は，「教師が，もれなく，ダブることなく数えあげさせる問題として出したら，生徒が教師も気が付かない上手い解法で解いた問題だよ」と話すと生徒がやる気になり，また導入としても適当な問題だからだ．これ以外の解法も生徒からでてきたが，今回はそれにはふれない．今年の私立武蔵高校高２でもあつかった．その後，別の問題を解いているときこの解法から結果は知られているが生徒が興味を持った問題が出たので紹介する．

発問１　右の図で長方形（正方形を含む）はいくつあるか？



発問２　ある生徒によれば右の数字をすべて足せば，正方形を含むすべての長方形の個数が求まる．どのような規則で数字が書かれ，またその和が求める長方形の個数になることを説明しろ．

4	8			
3	6	9		
2	4	6	8	10
1	2	3	4	5

＜数字の書き方＞

下の段１から順番に書いていき，２段目は２倍，３段目は３倍としていく．

＜理由＞

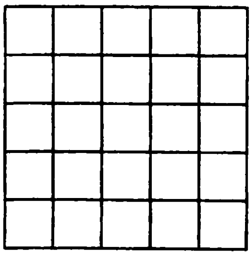
各正方形に書かれた数字は，その正方形の右上の点を右上の点する長方形の個数を表している．それは，長方形の左下の点を考えれば明らか．

上の導入をやっておくと組合せの後，次の問題が出せる．

発問３　右の図は５×５だが，$n\times n$ の正方形の中に含まれる長方形（含む正方形）の数を考えることにより，

$${}_{n+1}C_2\times{}_{n+1}C_2=\sum_{k=1}^{n}k^3$$

を証明しろ．（左辺，右辺を計算すると等しいので，はもちろんダメ）



ここで机間巡視をして，上手く考えられない生徒には発問２を思い出さる．発問２の解法を使うと右の図が作れる．この図が作れたがその先に進めない生徒には，「この和が何になればいいの？」など質問し，右の図に

$1^3+2^3+3^3+\cdots+5^3$

が隠れてないか考えさせる．また，

発問４　この表どこかでみたことない？

と発問し，九九の表と同じことを気づかせても面白い．

5	10	15	20	25
4	8	12	16	20
3	6	9	12	15
2	4	6	8	10
1	2	3	4	5

証明】

$n\times n$ の正方形なので，縦 $n+1$ 本　横 $n+1$ 本の辺がある．縦$n+1$ 本から２本，横$n+1$ 本から２本選べは１つ長方形が決まるので，求める個数は

（長方形の個数）＝　${}_{n+1}C_2\times{}_{n+1}C_2$

また，発問２の解き方をすれば

（長方形の個数）

$=(1+2+\cdots+n)+(2+4+\cdots+2n)+(3+6+\cdots+3n)+\cdots+(n+\cdots+n\times n)$．

となる．これはよく見ると$n\times n$ の九九の表になっている．（九九の表を使って３乗の和を求めるはすでに知られている）　これをくの字型にとっていくと，

（長方形の個数）

$=1+(2+4+2)+(3+6+9+6+3)+\cdots+(n+\cdots+n\times n+\cdots+n)$

$=1+2(1+2+1)+3(1+2+3+2+1)+\cdots+n(1+2+\cdots+n+\cdots+1)$

$=1+2(2\times2)+3(3\times3)+\cdots+n(n\times n)$

$=\sum_{k=1}^{n}k^3$

□

もちろん，我々は結果をしっているので当たり前だが，結果を知らなくても，${}_{n+1}C_2\times{}_{n+1}C_2=\sum_{k=1}^{n}k^3$ の両辺それぞれが，どちらも$n\times n$ の正方形の中に含まれる長方形（含む正方形）の数を表しているという，共通な性質を使えば簡単に証明できる．

5. 今後の課題

見かけは違う２つの問題に潜む共通な構造や特徴を利用した教材は生徒の興味を引くことが多いので，これ以外の教材を開発することが今後の課題となる．

参考文献

H・コークスター，幾何学再入門，河出書房新社

丸山哲朗，差分方程式序章，現代数学社